فصلنامه علوم و فنون نظامی
سال هجدهم، شماره ۵۹، بهار ۱۴۰۱
صص ۲۷۰- ۲۴۵

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۹/۱۰
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۲/۱۱

ارائه یک مدل ریاضی استکلبرگ جهت تخصیص سلاح به هدف با در نظر گرفتن حملات توأم هوایی و زمینی

نادر شمامی[۱]
اسماعیل مهدی‌زاده*[۲]
مهدی یزدانی[۳]
فرهاد اعتباری[۴]

نوع مقاله: پژوهشی

چکیده

تخصیص بهینه تجهیزات جهت خنثی‌سازی اهداف که اغلب با عنوان مسئله‌ی تخصیص سلاح به هدف از آن یاد می‌شود به یکی از کانون‌های اصلی تفکر نظامی نوین تبدیل شده است. تخصیص سلاح با در نظر گرفتن اصل صرفه‌جویی در منابع، بدون کاستن از قدرت نابودکنندگی سامانه‌ها همواره جهت محافظت از زیرساخت‌های حیاتی مورد توجه بوده است. زیرساخت‌های حیاتی شامل دارایی‌های فیزیکی یک سیستم است که از دست دادن آن‌ها منجر به اختلال قابل توجهی در سیستم‌های عملیاتی و کاربردی می‌شود. در این مقاله یک مدل ریاضی استکلبرگ به‌عنوان یک تکنیک در نظریه بازی‌ها جهت مدیریت صحنه نبرد ارائه می‌گردد. بازی در نظر گرفته شده شامل دو بازیگر(دشمن و نیروی خودی) است که هر یک جهت بهینه کردن اهداف خویش در تلاش هستند. در نظر گرفتن نیروهای هوایی و زمینی به‌صورت همزمان و در نظر گرفتن دارایی‌های طرف خودی و دشمن از جمله نوآوری‌های در نظر گرفته شده است. ابتدا یک مدل دو سطحی استکلبرگ ارائه می‌شود و پس‌از خطی‌سازی، مدل دو سطحی با استفاده از شرایط کاروش کان تاکر (KKT[۵]) به مدل تک سطحی معمولی تبدیل شده است. در نهایت جهت نمایش کارایی مدل، تعدادی مثال با بهره‌گیری از نرم‌افزار گمز حل شده است.

واژه‌های کلیدی:

تخصیص سلاح به هدف، مدیریت صحنه نبرد، نبرد هوایی و زمینی، نظریه بازی‌ها، مدل ریاضی استکلبرگ، شرایط بهینگی کاروش کان تاکر .

---

۱. گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع و مکانیک، واحد قزوین، دانشگاه آزاد اسلامی، قزوین، ایران.
۲. گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع و مکانیک، واحد قزوین، دانشگاه آزاد اسلامی، قزوین، ایران.
۳. گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع و مکانیک، واحد قزوین، دانشگاه آزاد اسلامی، قزوین، ایران.
۴. گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع و مکانیک، واحد قزوین، دانشگاه آزاد اسلامی، قزوین، ایران.
* نویسنده مسئول: emehdi@qiau.ac.ir

5. karush kuhn tucher conditions

cc BY NC ND

DOI: 10.22034/QJMST.2022.543952.1628

مقدمه

تجربه و درایت مدیران، نقش بی‌بدیل و انکارناپذیری در موفقیت عملیات دارد، اما نمی‌توان از فشارهای روانی و شرایط صحنه عملیاتی (که ممکن است تصمیم‌گیری بهینه را مختل و سرنوشت عملیات را عوض کند) غافل بود (Truong et al., ۲۰۲۱). باتوجه به اهمیت بسیار بالای نیروی انسانی در عملیات نظامی رویکرد نوین در اغلب ارتش‌های دنیا بهره‌برداری از سامانه‌های خود کنترلی اتوماتیک است که در این خصوص در اغلب صنایع نظامی مبادرت به ساخت ادوات بدون سرنشین گردیده است. اما جهت هدایت و کنترل تاکتیکی این سلاح‌ها (نظیر پهبادهای بدون سرنشین، خودروهای زرهی بدون سرنشین و ...) نیاز به مدل‌سازی‌های ریاضی جهت بهره‌برداری حداکثری از توان رزم آنها در صحنه عمل وجود دارد (Stoos et al., ۲۰۲۱).

از طرفی هدف از بررسی بازی جنگ طراحی یک سناریوی مناسب برای تخصیص سلاح‌های موجود در یک یگان نظامی به تهدیدهایی است که در صحنه‌ی نبرد یگان خودی را تهدید می‌کنند، به‌طوریکه احتمال بقای تسهیلات خودی حداکثر گردد (Kline et al., ۲۰۲۰). طراحی این سناریوها وابسته به پارامترهای متعددی است که تعداد آنها درجه‌ی پیچیدگی مسئله‌ی تخصیص سلاح به هدف را مشخص می‌کند (Sonuç, ۲۰۲۰).

در اغلب تحقیقاتی که در خصوص تخصیص سلاح به هدف انجام شده است به‌صورت تک نیرویی و بدون در نظر گرفتن تأمین منطقه‌ای یا تأمین منابع حیاتی انجام پذیرفته است و صرفا با تمرکز بر تخصیص سلاح به هدف مدل‌سازی و مدل ارائه شده حل گردیده است که در آنها به‌دنبال حداکثر تخریب نیروی آفندی دشمن و یا حداقل نمودن مهمات مصرفی خودی پرداخته شده است. این در حالی‌است که در صحنه نبرد واقعی در جنگ‌های آینده به‌کارگیری توأم چند نیرو (به‌ویژه نیروی هوایی و زمینی) امری اجتناب‌ناپذیر است و از طرفی حفظ منابع حیاتی همچون پالایشگاه‌ها، بنادر، گذرگاه‌ها، پل‌ها و ... در جنگ‌ها یکی از اهداف و ارکان اصلی طرحریزی‌های تاکتیکی و عملیاتی در صحنه نبرد است. از این‌رو در این تحقیق با در نظر گرفتن نیروهای هوایی و زمینی به‌صورت همزمان و در نظر گرفتن دارایی‌ها و منابع حیاتی طرف خودی و دشمن و ... برای مسئله تخصیص سلاح به هدف مدل ریاضی ارائه و همچنین مدل ارائه شده در قالب یک بازی استکلبرگ طرح و حل شده است. مدل بازی استکلبرگ، یک بازی راهبردی و یک رقابت ناقص است. ناقص بودن رقابت در اصطلاح دلالت بر شرایطی دارد که در آن عناصر و عوامل انحصاری کم و بیش حضور دارند. به بیان دیگر مهاجم و مدافع تا حدودی می‌توانند بر نظرات هم اثر بگذارند. به این ترتیب رقابت‌کنندگان این بازی عناصر انحصاری دوگانه در صحنه نبرد هستند. این بازی دو بازیکن دارد که هر یک دارای امتیازهای اختصاصی‌اند. بازیگر اول مدافع

بوده و بازیگر دوم مهاجم است. به این معنا که رقابت بر سر دستیابی به یک هدف مشترک نیست و بازیکنان بر سر بهبود وضعیت شخصی و افزایش سود خود با یکدیگر به رقابت می‌پردازند.
در این مقاله یک مدل ریاضی استکلبرگ جهت تخصیص سلاح به هدف به‌منظور حفاظت از گروه‌های زمینی خودی و تعدادی از دارایی‌های خودی که در برابر تهدیدات هوایی و زمینی دشمن قرار گرفته‌اند، ارائه می‌گردد. در این بازی احتمال برخورد موشک نیروی زمینی و هوایی دشمن به نیروهای خودی و بالعکس وجود دارد. در مدل ارائه شده در این تحقیق هدف اصلی نیروهای خودی بیشینه نمودن احتمال سالم ماندن دارایی‌ها و نیروهای زمینی خودی و همچنین کمینه نمودن احتمال سالم ماندن نیروی هوایی و زمینی دشمن است. از طرفی هدف اصلی دشمن نیز بیشینه نمودن احتمال سالم ماندن نیروهای خود و انهدام دارایی‌ها و منابع نیروی پدافند کننده است. سوال اصلی تحقیق آن است که چگونه با استفاده از مدل‌سازی ریاضی و بکارگیری نظریه بازی‌ها، تعداد سلاح محدود نیروهای خودی به اهداف(نیروهای هوایی و زمینی دشمن) اختصاص داده شود تا حداکثر حفاظت از دارایی‌های خودی به‌عمل آید؟ بازیگرهای در نظر گرفته شده در این تحقیق نیروهای دشمن و نیروهای خودی هستند. همچنین در این پژوهش بازی غیرهمکارانه به‌صورت استکلبرگ در نظر گرفته شده است. در رویکرد غیرهمکارانه هر کدام از اجزای بازی به‌صورت مستقل و بدون در نظر گرفتن عملکرد سایر اجزا فعالیت می‌کنند. بازی در نظر گرفته شده در این پژوهش از نوع بازی بدون آگاهی کامل است. بازی‌های با آگاهی کامل، بازی‌هایی هستند که تمام بازیکنان می‌توانند در هر لحظه تمام ترکیب بازی نیروی مقابل (بازیگر مقابل) خود را مشاهده کنند (مانند بازی شطرنج). از سوی دیگر در بازی‌های بدون آگاهی کامل ظاهر و ترکیب کل بازی برای بازیکنان پوشیده است، مانند بازی‌هایی که با ورق انجام می‌شود. در این پژوهش با توجه به این‌که بازیکنان نمی‌توانند در هر لحظه تمام ترکیب بازی را در مقابل خود مشاهده کنند، بازی بدون آگاهی کامل است. بازی در نظر گرفته شده در این پژوهش غیرمتقارن است. بازی متقارن بازی است که نتیجه و سود حاصل از یک راهبرد تنها به این وابسته است که چه راهبرد دیگری در بازی پیش گرفته شود؛ و از این‌که کدام بازیکن این راهبرد را در پیش گرفته است، مستقل است. به‌عبارت دیگر اگر مشخصات بازیکنان بدون تغییر در سود حاصل از به‌کارگیری راهبرد بتواند تغییر کند، این بازی متقارن است. بازی‌های نامتقارن اغلب بازی‌هایی هستند که مجموعه‌ی راهبرد یکسانی برای بازیکنان در بازی وجود ندارد. در این تحقیق ما به دنبال آن هستیم که یک مدل با در نظر گرفتن تئوری بازی‌ها و مدل استکلبرگ در مسئله تخصیص سلاح به هدف ارائه نمائیم. همچنین در مدل استکلبرگ ارائه شده حملات هوایی و

زمینی به‌صورت همزمان در نظر گرفته می‌شود و ضمنا توجه به دارایی‌ها و نیروی‌های خودی و دشمن به‌صورت همزمان در مدل ارائه گردیده است.

مبانی نظری و پیشینه‌های پژوهش

مدیریت صحنه نبرد

صحنه‌ی نبرد (عملیات/ جنگ)، بخشی از صحنه‌ی جنگ است که عملیات رزمی در آن طراحی و اجرا می‌شوند (حیدری، ۱۳۹۸). صحنه نبرد، منطقه جغرافیایی مشخصی است که می‌تواند مربوط به داخل یا خارج از یک کشور یا ترکیبی از چند کشور باشد که تحت فرماندهی یک فرمانده عالی منطقه‌ای قرار دارد (امیر بیگی، ۱۳۷۲). صحنه‌ی نبرد جایی است که احتمال درگیری در آن بالا است. لذا لازم است طوری برنامه‌ریزی شود که اگر تجاوزی صورت گیرد، بتوان به خوبی از سرزمین و نیروهای خودی دفاع کرد. کشورهایی که راهبرد آفندی و هجومی دارند در صحنه‌های نبرد طوری طرحریزی می‌کنند که بتوانند به موقع وارد عمل شده و موفقیتی داشته باشند (افشردی، ۱۳۹۴). هر فرماندهی که سریع‌تر و زودتر تصمیم‌گیری کرده و با سریع‌ترین وسیله اقدام نماید پیروز میدان خواهد بود (حیدری، ۱۳۹۸). بنابراین مدیریت صحنه‌ی نبرد از ارکان اساسی هر جنگی بوده که لازم است همه فرماندهان و مدیران جنگی توجه ویژه‌ای به آن داشته باشند. تحقیق در عملیات به‌عنوان یک ابزار مدیریت و تصمیم‌گیری سال‌ها در حوزه‌های جنگی و صحنه‌های نبرد در سطح دنیا مورد استفاده بوده و به‌کارگیری تکنیک‌های تحقیق در عملیات موفقیت‌های بی‌نظیری را برای مدیران جنگی به ارمغان آورده است. در این مقاله یک مدل استکلبرگ از نظریه بازی‌ها که یکی از روش‌های تحقیق در عملیات در شرایط رقابتی است، جهت تخصیص سلاح به هدف جهت مدیریت صحنه نبرد ارائه گردیده است.

تخصیص سلاح به هدف

مسئله تخصیص سلاح به هدف، مسئله‌ای بنیادی و برخاسته از کاربردهای دفاعی تحقیق در عملیات است و عبارت است از تخصیص n سلاح به m هدف شناخته شده به‌نحوی که امکان نجات(ماندگاری) اهداف حداقل شود(Ahuja et al., 2003) از طرفی روش‌های حل دقیق برای حل مسئله تخصیص سلاح به اهداف در حالت‌های خاصی مورد مطالعه قرار گرفته است. آهوجا (Ahuja et al., 2003) برای حل دقیق این مسئله یک روش شاخه و کران پیشنهاد داده است. در برخی دیگر از مطالعات متناسب با استراتژی انتخاب شده، از رویکردهای حل دقیق مانند رویکرد رهاسازی لاگرانژ و روش خطی‌سازی استفاده شده است (Karasakal, 2008) و (Ahuja, 2007). علاوه بر رویکردهای فوق شیوه‌هایی مبتنی بر روش‌های ترکیبی و چند هدفه نیز مورد استفاده قرار گرفته‌اند (Ahuja, 2007). در سال 2008 یک مدل برنامه‌ریزی غیرخطی مختلط

عدد صحیح برای مسئله چیدمان پایگاه‌های آتش و تخصیص سلاح‌های آن‌ها به اهداف با وارد کردن بیشترین تخریب به اهداف مهاجم ارائه شده است (Karasakal, 2008) که با روش‌های جستجوی محلی و جستجوی ممنوعه به‌منظور دست‌یابی به جواب‌های نزدیک به جواب بهینه برای این مسئله طراحی شده‌اند. آکسِن[۱] و همکاران با در نظر گرفتن ظرفیت و محدودیت بودجه در مسئله R- میانه ممانعتی[۲]، به دنبال شناسایی تسهیلاتی بودند تا با تخصیص منابع حفاظتی به آن تسهیلات، تأثیر حملات احتمالی را کمینه کنند (Aksen et al., 2008). در این مسئله پس از ممانعت شدن تسهیلات، سایر تسهیلات ممانعت نشده، دارای ظرفیت انعطاف‌پذیر هستند که به ازای افزایش یک واحد هزینه، امکان تخصیص مجدد یک مشتری به آن تسهیل امکان‌پذیر می‌شود. برای حل این مسئله از روش الگوریتم شمارش ضمنی[۳] به‌کار رفته در درخت دودویی استفاده شده است. دو روش تجزیه دقیق بِندِرز و نابرابری‌های معتبر[۴]توسط لوسادا[۵]و همکاران برای حل مدل‌سازی مختلط عدد صحیح دو سطحی با هدف کمینه‌سازی بیشترین مسافت طی شده ارائه شد(Losada et al., 2009). در این مدل هر گره تقاضا در هر دوره زمانی از نزدیک‌ترین تسهیل مختل نشده خدمت دریافت می‌کند. لیبراتور[۶] و همکاران در مقاله‌ای به آنالیز استراتژی‌های محافظت، در شرایط غیر قطعی بودن تعداد ممانعت‌های پیشِ روی سیستم پرداختند. در این مقاله علاوه بر مدل R- میانه، یک مدل حداکثر پوشش نیز ارائه گردیده است. در این مدل، به دلیل عدم قطعیت در تعداد حملات، تعداد تسهیلات ممانعت شده نیز تصادفی می‌باشند. هدف این مسئله این است که در شرایطی با بدترین الگوی ممانعتی، هزینه‌های وزنی احتمالی کمینه گردد (Liberatore et al., 2011). محمودجانلو[۷] و همکاران یک مدل سه سطحی براساس بازی استکلبرگ جهت محافظت تسهیلات برای یک مسئله تخصیص سلاح ارائه نمودند. جهت نزدیکتر شدن با واقعیت از رویکردهای پوشش‌دهی کلی در سه سطح مدل استفاده شده است. برای حل سطح اول مدل از دو رویکرد ابتکاری ترکیبی و برای حل سطح دوم و سوم از رویکرد دقیق استفاده شده است. نتایج بیانگر عملکرد مناسب مدل در پوشش‌دهی تسهیلات است(Mahmoodjanloo et al., 2016). نسیم[۸] و همکاران جهت ارزیابی تهدید اهداف از سیستم پشتیبان تصمیم‌گیری استفاده کرده‌اند. پس از تعریف الگوریتم استنتاج، براساس تحلیل عوامل

1. Aksen
2. R-interdiction median problem
3. Implicit Enumeration Algorithm
4. Super-Valid-Inequalities
5. Losada
6. Liberatore
7. Mahmoodjanloo
8. Naseem

در ارزیابی تهدید سیستم دفاع هوایی، قوانین استنتاج را تعریف نموده‌اند. در نهایت با استفاده از رویکردهای حل مختلف، هدف هوایی فرضی، اعتبارسنجی سیستم را بررسی نمودند. آنها معتقدند این تحقیق نه تنها سبب غنی‌سازی در بحث تخصیص سلاح شده است، بلکه رویکرد جدیدی را در حوزه ارزیابی تهدید مطرح کرده است (Naseem et al., 2017). اکبری و همکاران یک مدل ریاضی سه سطحی بر اساس بازی پایه و پیرو برای محافظت از تسهیلات سیستم خدمت‌رسان ارائه کردند. در مدل ارائه شده مدافع می‌تواند با پیش‌بینی آسیب‌پذیری سیستم در مقابل اختلالات آتی، در خصوص تعداد و مکان تسهیلات خدمات‌رسان تصمیم‌گیری نماید. از این‌رو فرض می‌گردد تعدادی گزینه بالقوه جهت احداث تسهیلات با ویژگی‌های معلوم، از قبل مشخص شده باشند. از جمله اهداف این پژوهش کمینه کردن هزینه مکانیابی تسهیلات و کاهش هزینه‌های جاری سیستم تحت بدترین سناریوی تخریب توسط مهاجم است (Akbari et al., 2017). کوادروس[1] و همکاران یک مدل دو سطحی را برای میانه ممانعتی ارائه نموده‌اند. هدف اصلی پژوهش آنها کمینه کردن هزینه‌های توزیع بعد از تهاجم دشمن و دفاع خودی است. از جمله نوآوری‌های مسئله آنها در نظر گرفتن تعداد چند جمله‌ای متغیرها و تعداد نمایی محدودیت‌ها بوده است. در نهایت مدل پیشنهادی با الگوریتم شاخه و برش حل شده است (Quadros et al., 2018). بیگدلی و همکاران در تحقیقی به مدل‌سازی و حل بازی‌های امنیتی در محیط عدم قطعیت جهت تخصیص منابع محدود به اهداف پرداختند (Bigdeli et al., 2019). ژو[2] و همکاران یک مدل دو مرحله‌ای برای مسئله تخصیص سلاح به اهداف ارائه کرده‌اند که در مرحله اول با توجه به محدودیت زمانی، سلاح‌ها به اهداف اختصاص یافته و در مرحله دوم با توجه به شرایط مسئله، پایگاه‌ها در فضای نبرد جابه‌جا می‌شوند. در نظر گرفتن مسئله به‌صورت دو مرحله‌ای باعث می‌شود جواب‌های شدنی که ممکن است جواب بهینه از روی آنها ایجاد شود نادیده گرفته شود (Zou et al., 2020). ژانگ [3]و همکاران نیز در تحقیقی مشابه، انواع مختلف برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی عدد صحیح، شبکه‌ای و شاخه و کران را برای مسئله تخصیص سلاح به هدف بررسی نموده‌اند. با الگوریتم‌های ارائه شده در این تحقیق، پاسخ‌های بهینه مسائل دارای اندازه متوسط مثلاً بیش از ۸۰ سلاح و ۸۰ هدف و اندازه بزرگ مثلاً بیش از ۲۰۰ سلاح و ۲۰۰ هدف درخصوص تخصیص سلاح را در حدود چند ثانیه بدست آورد (Zhang et al., 2020). وو[4] و همکاران به‌منظور ارزیابی تهدید جنگ سطحی تحقیقی انجام داده‌اند که در آن دو هدف کلی را

---

1. Quadros
2. Zou
3. Zhang
4. Wu

دنبال کرده‌اند. هدف اول آنکه اطلاعاتی را که خبرگان نبرد سطحی برای تشخیص سطح تهدید حامل‌ها استفاده می‌کنند بدست آورند. هدف دیگر، ارائه یک الگوریتم اولیه برای ارزیابی تهدید است. مدل ریاضی با رویکرد MOEA/D حل شده است. نتایج بیانگر عملکرد مناسب مدل ریاضی پیشنهادی است(Wu et al., 2021). سیلاو[1] و همکاران در تحقیق خود به بررسی انواع مختلف مسائل غیرخطی تخصیص سلاح پرداخته‌اند. در این تحقیق اجزای انواع مسائل تخصیص سلاح به هدف که هدف‌محور هستند، مورد بررسی قرارگرفته و مدل غیرخطی آنها نیز ارائه شده است. در این مدل‌ها به دو نوع از مسائل تخصیص سلاح در حالت پویا نیز اشاره شده است که البته به اعتقاد محققین، این نوع مسائل در برخی موارد می‌توانند به‌صورت برنامه‌های تصادفی نیز مدل‌سازی شوند (Silav et al., ۲۰۲۱). فقهی[2] و همکاران برنامه‌ریزی غیرخطی مختلط را برای مسئله چیدمان حامل‌های جنگی و تخصیص سلاح‌های آنها به تهدیدها با هدف وارد کردن بیشترین تخریب به تهدیدها ارائه کرده و روش‌های جستجوی محلی بیشترین بهبود برای این مسئله را طراحی نموده‌اند. نتایج به دست آمده از این روش‌ها با روش شمارش کامل مقایسه شده و مشخص شد که رویکرد پیشنهادی با داشتن کمترین درصد انحراف از بهترین جواب‌ها، کارایی بیشتری دارد (Feghhi et al., 2021). موسگاس[3] و همکاران یک مدل بهینه‌سازی چندهدفه با استفاده از تئوری‌های بازی تکمیلی، برای مسئله تخصیص سلاح در حالت حملات تروریستی و به‌صورت بلادرنگ ارائه نموده‌اند. ابتدا مجموعه جواب‌های شدنی به ازاء هر تابع بدست آمده و سپس با استفاده از تئوری بازی تکاملی، تعامل هر راه حل به‌عنوان یک بازیگر در فضای جواب با سایر بازیگران بررسی می‌شود تا بتواند بهترین جواب را برای بقا در فضا تعیین نماید. مطالعه موردی در نظر گرفته شده کشور عراق بوده است (Musegaas et al., 2021).

نظریه بازی‌ها و مدل استکلبرگ:

نظریه بازی‌ها شاخه‌ای از تحقیق در عملیات محسوب می‌شود که رفتار ریاضی حاکم بر یک موقعیت تضاد را مورد بررسی قرار می‌دهد (بیگدلی، ۱۳۹۸). در بسیاری از مسائل دنیای واقعی تصمیمات اتخاذ شده توسط یک فرد وابسته به تصمیم فرد یا افراد دیگر است. تصمیم‌گیرندگان و مدیران اغلب با مسائل تصمیم‌گیری تحت تضاد یا رقابت مواجه می‌شوند، زیرا راهبردهایشان را به‌طور مستقل یا با یک توافق دو جانبه انتخاب می‌کنند، از این‌رو عایدی‌های آنها تحت تأثیر تصمیمات دیگران است. نظریه بازی‌ها وسیله‌ای قدرتمند برای تحلیل این‌گونه مسائل است (بیگدلی، ۱۳۹۶). فرماندهان نیز در مدیریت صحنه نبرد ناگزیر به اتخاذ تصمیماتی هستند که در

1. Silav
2. Feghhi
3. Musegaas

تضاد با نیروی مقابل یا دشمن است. از این‌رو تصمیمات اتخاذی هریک از طرفین در صحنه نبرد بر روی راه‌کارهای نیروی مقابل تأثیرگذار است. لذا به‌کارگیری نظریه بازی‌ها در مدیریت صحنه نبرد می‌تواند به اتخاذ تصمیم بهینه فرماندهان کمک نماید. الیور هایوود در مقاله خود اهمیت نظریه بازی را در تصمیم‌گیری فرماندهان نشان داده است. او نبردهای مختلفی از جنگ جهانی دوم را از دید نظریه بازی بررسی کرد و نتیجه گرفت که تصمیم‌های نظامی مشابه با جواب به‌دست آمده از نظریه بازی‌هاست (Haywood, 1989).

یکی از بازی‌های پرکاربرد نظریه بازی‌ها در حوزه‌های اقتصادی و دفاعی، بازی استکلبرگ است. بازی استکلبرگ حالت خاصی از بازی‌های غیرهمکارانه دو مرتبه‌ای است که در آن یک بازیگر بر دیگری از نظر زمان تصمیم‌گیری غلبه یا برتری دارد. فرض کنید بازیگر p1 بازیگر رهبر (پیشرو) و بازیگر p2 بازیگر پیرو (دنباله‌رو) باشد. ابتدا بازیگر رهبر استراتژی خود را اتخاذ می‌کند، سپس بازیگر پیرو با مشاهده استراتژی بازیگر رهبر، به حل مسئله بهینه‌سازی خود برای به‌دست آوردن استراتژی بهینه می‌پردازد. مجموعه این استراتژی‌های بهینه همان مجموعه پاسخ منطقی بازیگر پیرو را تشکیل می‌دهند. در نهایت بازیگر رهبر با قرار دادن مجموعه پاسخ منطقی بازیگر پیرو در مسئله بهینه‌سازی خود، استراتژی بهینه را با توجه به استراتژی اتخاذ شده از جانب بازیگر پیرو، تنظیم می‌کند. در مدل بازی استکلبرگ مجموعه پاسخ منطقی بازیگر پیرو در مسئله بهینه‌سازی بازیگر رهبر لحاظ می‌شود(احمدی و همکاران، ۱۳۹۵). در واقع در صحنه نبرد نیز فرماندهان نیروهای درگیر در صحنه با توجه به تاکتیک‌ها، نوع آرایشات و چگونگی حرکات نیروی مقابل تصمیمات خود را اتخاذ می‌کنند، از این‌رو درصورت مدل‌سازی رفتار و حرکات دشمن و نیروهای خودی در صحنه نبرد و استفاده از روش‌هایی مانند مدل بازی استکلبرگ می‌تواند فرماندهان را در اتخاذ تصمیمات دقیق‌تر و سریع‌تر یاری بخشد.

با توجه به مرور ادبیات و بررسی مقالات به‌نظر می‌رسد در مسئله تخصیص سلاح به اهداف تاکنون مدلی که حملات هوایی و زمینی را به‌صورت همزمان درنظر گرفته باشد و دارایی‌ها و نیروی‌های خودی و دشمن را به‌صورت همزمان مورد توجه قرار داده باشد ارائه نشده است. در ادامه یک مدل ریاضی استکلبرگ جهت تخصیص سلاح به هدف به‌منظور مدیریت صحنه نبرد با در نظر گرفتن حملات توأم هوایی و زمینی و درنظر گرفتن نیروهای خودی و دشمن ارائه و حل می‌شود.

روش‌شناسی پژوهش

تحقیق حاضر از نظر نوع تحقیق، کاربردی است، چون نتایج تحقیق در سامانه‌های مدیریت صحنه نبرد و بازی جنگ قابل بهره‌برداری است و از نظر روش‌شناسی، در این تحقیق از مدل‌سازی ریاضی

با رویکرد بازی استکلبرگ از نظریه بازی‌ها استفاده شده است. در این تحقیق یک مدل ریاضی دوسطحی ارائه گردیده و برای حل مدل از روش خطی‌سازی و بررسی شرایط بهینگی کاروش کان تاکر استفاده شده است و در نهایت از نرم‌افزار گمز استفاده شده است.

مدلسازی ریاضی

در این بخش مفروضات مدل به همراه مدل ریاضی تشریح می‌گردد.

مفروضات مدل

- بازی در نظر گرفته شده در این پژوهش از نوع بازی بدون آگاهی کامل است.
- بازی در نظر گرفته شده به‌صورت نامتقارن و به‌صورت رقابتی استکلبرگ است.
- حداکثر تعداد موشک قابل تخصیص نیروی هوایی و زمینی بازیگرها از پیش مشخص شده است.
- مدل به‌صورت چند دوره‌ای و دو سطحی در نظر گرفته شده است.
- تصمیم‌گیرندگان اطلاعات کامل از واکنش یکدیگر دارند و واکنش‌ها منطقی هستند.

اندیس‌ها

m	نیروی خودی
e	نیروی دشمن
d	دارایی
z	نیروی زمینی
a	نیروی هوایی
t	پریود زمانی

پارامترها

i_d	تعداد دارایی گروه خودی
i_z	تعداد سلاح های گروه خودی
J_z	تعداد واحدهای هوایی دشمن
j_z	تعداد واحدهای زمینی دشمن
$F_m(u_b, u_r)$	تابع هزینه گروه خودی
$F_e(u_b, u_r)$	تابع هزینه گروه دشمن
$v_i^{e(d)}$	ارزش iامین دارایی گروه خودی از دید گروه مقابل
$v'^{e(z)}_i$	ارزش iامین نیروی زمینی گروه خودی از دید گروه مقابل
$l_{ji}^{e(a)}(t)$	احتمال برخورد موشک نیروی هوایی j ام تیم دشمن به تیم مقابل به i امین نیروی تیم مقابل در پریود t
$l_{ji}^{e(z)}(t)$	احتمال برخورد موشک نیروی زمینی j ام تیم دشمن به تیم مقابل به i امین نیروی تیم مقابل در پریود t

$l_{ij}^{m(z)}(t)$	احتمال برخورد موشک زمینی i ام تیم خودی به تیم دشمن به j امین نیروی تیم دشمن در پریود t
$q_i^{b(d)}$	ارزش iامین دارایی گروه خودی از دید خود
${q'}_i^{b(z)}$	ارزش iامین نیروی زمینی گروه خودی از دید خود
$g_j^{e(a)}$	ارزش jامین نیروی هوایی گروه دشمن از دید خود
${g'}_j^{e(z)}$	ارزش jامین نیروی زمینی گروه دشمن از دید خود
$o_j^{m(a)}$	ارزش jامین نیروی هوایی گروه خودی از دید خود
${o'}_j^{m(z)}$	ارزش jامین نیروی زمینی گروه دشمن از دید گروه مقابل
$t_i^{m(a)}$	دوره راه اندازی سلاح i امین گروه زمینی خودی
$t_j^{e(z)}$	دوره راه اندازی سلاح j امین گروه زمینی دشمن
$t_j^{e(a)}$	دوره راه اندازی سلاح j امین گروه هوایی دشمن
$S_j^{e(a)}(t)$	حداکثر تعداد موشک قابل تخصیص نیروی هوایی j ام تیم دشمن در کل زمان تخصیص
$s_j^{e(z)}(t)$	حداکثر تعداد موشک قابل تخصیص نیروی زمینی j ام تیم دشمن در کل زمان تخصیص
$S_i^{m(z)}(t)$	حداکثر تعداد موشک قابل تخصیص نیروی زمینی i ام تیم خودی در کل زمان تخصیص
$s_i^{m(z)}(t)$	حداکثر تعداد موشک قابل تخصیص نیروی زمینی i ام تیم خودی در پریود t
$S_j^{e(z)}(t)$	حداکثر تعداد موشک قابل تخصیص نیروی زمینی j ام تیم دشمن در پریود t
$s_j^{e(a)}(t)$	حداکثر تعداد موشک قابل تخصیص نیروی هوایی j ام تیم دشمن در پریود t

متغیرها

$r_j^{(a)}(0)$	احتمال سالم ماندن نیروی هوایی j ام تیم دشمن در ابتدای دوره تخصیص
$r_j^{(z)}(0)$	احتمال سالم ماندن نیروی زمینی j ام تیم دشمن در ابتدای دوره تخصیص
$B_i^{(z)}(0)$	احتمال سالم ماندن نیروی زمینی i ام تیم خودی در ابتدای دوره تخصیص
$b_i^{(d)}(t)$	احتمال سالم ماندن iامین دارایی گروه خودی در پریود t
${b'}_i^{(z)}(t)$	احتمال سالم ماندن iامین نیروی زمینی گروه خودی در پریود t
$r_j^{(a)}(t)$	احتمال سالم ماندن jامین نیروی هوایی گروه دشمن در پریود t
$r_j^{(z)}(t)$	احتمال سالم ماندن jامین نیروی زمینی گروه دشمن در پریود t
$B_i^{(a)}(0)$	احتمال سالم ماندن دارایی i ام تیم خودی در ابتدای دوره تخصیص
$y_{ij}^{m(z)}(t)$	برابر با ۱ اگر سلاح نیروی زمینی i ام تیم خودی به i ایمن هدف گروه دشمن در لحظه t تخصیص یافته باشد، در غیر این صورت برابر صفر
${x'}_{ji}^{e(z)}(t)$	برابر با ۱ اگر سلاح نیروی زمینی j ام تیم دشمن به i ایمن هدف گروه مقابل در لحظه t تخصیص یافته باشد، در غیر این صورت برابر صفر
$x_{ji}^{e(a)}(t)$	برابر با ۱ اگر سلاح نیروی هوایی j ام تیم دشمن به i ایمن هدف گروه مقابل در لحظه t تخصیص یافته باشد، در غیر این صورت برابر صفر
$y_i^{m\,(z)}(t)$	تخصیص سلاح نیروی زمینی i ام تیم خودی در لحظه t به دشمن

$y_j^{e(a)}(t)$ تخصیص سلاح نیروی هوایی j ام تیم دشمن در لحظه t به تیم مقابل
$y_j^{e(z)}(t)$ تخصیص سلاح نیروی زمینی j ام تیم دشمن در لحظه t به تیم مقابل

مدل دو سطحی استکلبرگ ارائه شده تحقیق:

$$Max\ F_B(u_b u_r, t) = \sum_{i=1}^{i_d} q_i^{b(d)}\, b_i^{(d)}(t) + \sum_{i=1}^{i_z} q'^{b(z)}_i b'^{(z)}_i(t) - \sum_{j=1}^{j_a} o_j^{m(a)} r_j^{(a)}(t) - \sum_{j=1}^{j_z} o'^{m(z)}_j r_j^{(z)}(t) \quad (1)$$

$$b_i^{(d)}(t) = b_i^{(d)}(t-1).(\prod_{j=1}^{j_a}(1 - l_{ji}^{e(a)}(t)\delta\big(i - y_j^{e(a)}(t) r_j^{(a)}(t)\big).\prod_{j=1}^{j_z}(1 - l_{ji}^{e(z)}(t)\delta\big(i - y_j^{e(a)}(t) r_j^{(z)}(t)\big). \quad (۲)$$

$$b'^{(z)}_i(t) = b'^{(z)}_i(t-1).(\prod_{j=1}^{j_a}(1 - l_{ji}^{e(a)}(t)\delta\big(i - y_j^{e(a)}(t) r_j^{(a)}(t)\big).\prod_{j=1}^{j_z}(1 - l_{ji}^{e(z)}(t)\delta\big(i - y_j^{e(a)}(t) r_j^{(z)}(t)\big). \quad (۳)$$

$$\sum_{t=1}^{K}\sum_{j=1}^{j_a+j_z} y_{ij}^{m(z)}(t) \le s_i^{m(z)}(t) \qquad i = 1, \dots K, i_z \quad (۴)$$

$$\sum_{j=1}^{j_z+j_a} y_{ij}^{(z)}(t) \le s_i^{m(z)}(t) \qquad i = 1, \dots, K, i_z, t = 1, \dots, K \quad (۵)$$

$$Max\ F_R(u_b u_r, t) = -\sum_{i=1}^{i_d} v_i^{e(d)}\, b_i^{(d)}(t) - \sum_{i=1}^{i_z} v'^{e(z)}_i b'^{(z)}_i(t) + \sum_{j=1}^{j_a} g_j^{e(a)} r_j^{(a)}(t) + \sum_{j=1}^{j_z} g'^{e(z)}_j r_j^{(z)}(t) \quad (۶)$$

$$r_j^{(a)}(t) = r_j^{(a)}(t-1).(\prod_{i=1}^{i_z}(1 - l_{ij}^{e(z)}(t)\delta\big(y_i^{m(z)}(t) - j\big).B_i^a(t) \quad (۷)$$

$$r_j^{(z)}(t) = r_j^{(z)}(t-1).(\prod_{i=1}^{i_z}(1 - l_{ij}^{e(z)}(t)\delta\big(y_i^{m(z)}(t) - j\big).B_i^z(t) \quad (۸)$$

$$\delta\big(u_{(.)} - j\big) = \begin{cases} 0 & if\ u_{(.)} \ne j \\ 1 & if\ u_{(.)} \ne j \end{cases} \quad (۹)$$

$$t \le t_i^{e(z)} \le t+1 \qquad j = 1, \dots, K, j_z, t = 1, \dots, K \quad (۱۰)$$

$$t \le t_j^{e(z)} \le t+1 \qquad j = 1, \dots, K, j_z, t = 1, \dots, K \quad (۱۱)$$

$$t \le t_j^{e(a)} \le t+1 \qquad i = 1, \dots, K, j_a, t = 1, \dots, K \quad (۱۲)$$

$$\sum_{t=1}^{K}\sum_{i=1}^{i_z+i_a} x_{ji}^{e(a)} \le s_j^{e(z)}(t) \qquad j = 1, \dots, K, j_z \quad (1۳)$$

$$\sum_{t=1}^{K}\sum_{i=1}^{i_z+i_a} x'^{e(z)}_{ji}(t)(t) \le s_j^{e(a)}(t) \qquad j = 1, \dots, K, j_a \quad (1۴)$$

$$\sum_{i=1}^{i_z+i_d} x_{ji}^{e(a)} \le s_j^{e(z)}(t) \qquad j = 1, \dots, K, j_z, t = 1, \dots, K \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^{i_z+i_d} x'^{e(z)}_{ji}(t) \leq s_j^{e(a)}(t) \qquad j = 1, \dots, K, j_a, t = 1, \dots, K \quad (16)$$

$$r_j^{(z)}(0), r_j^{(a)}(0), B_i^{(a)}(0), B_i^{(z)}(0) \geq 0 \quad (17)$$
$$x_{ji}^{e(a)}(t), x'^{e(z)}_{ji}(t), y_{ij}^{m(z)}(t) \in \{0,1\}$$

معادله (۱) مجموع جبری وزن‌دار سالم ماندن دارایی‌ها و واحدهای زمینی خودی و میزان نابودی نیروهای هوایی دشمن است که تابع هدف نیروهای خودی یا همان مدافع را نشان می‌دهد. با بیشینه نمودن این معادله احتمال سالم ماندن برای دارایی‌ها و نیروهای زمینی خودی حداکثر و احتمال سالم ماندن نیروی هوایی و زمینی دشمن حداقل می‌گردد.

معادله (۲) احتمال سالم ماندن i امین دارایی گروه خودی در پریود t را محاسبه می‌کند. معادله (۳) احتمال سالم ماندن i امین نیروی زمینی گروه خودی در پریود t را محاسبه می‌کند. محدودیت (۴) مقدار حداکثر تعداد موشک قابل تخصیص نیروی زمینی i ام تیم خودی در پریود t را کنترل می‌کند. محدودیت(۵) حداکثر تعداد موشک قابل تخصیص نیروی زمینی i ام تیم خودی در کل زمان تخصیص را کنترل می‌کند.

معادله (۶) تابع هزینه دشمن در جهت منافع آن یعنی کمینه‌سازی احتمال سالم ماندن گروه مقابل و مناطق تحت حفاظت نیروهای مدافع و حداکثرسازی احتمال سالم ماندن نیروی هوایی و زمینی خودش(مهاجم) است. با بیشینه‌سازی معادله (۶) احتمال سالم ماندن نیروی دشمن (مهاجم) بیشینه و احتمال سالم ماندن دارایی‌ها و نیروی زمینی مقابل(مدافع) کمینه می‌گردد. معادله (۷) احتمال سالم ماندن j امین نیروی هوایی گروه دشمن در پریود t را محاسبه می‌کند. معادله (۸) احتمال سالم ماندن j امین نیروی زمینی گروه دشمن در پریود t را نشان می‌دهد. معادله (۹) تابع ضربه را نشان می‌دهد. محدودیت (۱۰) بیانگر آن است که مدت زمان لازم برای تسلیح در نیروی زمینی دشمن حداکثر برابر یک پنجره زمانی در نظر گرفته شده است. محدودیت (۱۱) و (۱۲) حداکثر زمان تسلیح را برای نیروی زمینی و هوایی گروه دشمن را تعیین می‌کند. محدودیت (۱۳) حداکثر تعداد موشک قابل تخصیص نیروی زمینی j ام تیم دشمن در پریود t را کنترل می‌کند. محدودیت (۱۴) حداکثر تعداد موشک قابل تخصیص نیروی هوایی j ام تیم دشمن در پریود t را کنترل می‌کند. محدودیت (۱۵) حداکثر تعداد موشک قابل تخصیص نیروی زمینی j ام تیم دشمن در پریود t را محاسبه می‌کند. محدودیت (۱۶) حداکثر تعداد موشک قابل تخصیص نیروی هوایی j ام تیم دشمن در پریود t را محاسبه می‌کند. محدودیت (۱۷) نوع متغیرهای تصمیم مسئله را نشان می‌دهد.

رویکردهای حل

روش تبدیل مدل دو سطحی به مدل تک سطحی با استفاده از روش کاروش کان تاکر(KKT):

در مسائل برنامه‌ریزی دوسطحی دو تصمیم گیرنده وجود دارد. تصمیم گیرنده‌ی اول را رهبر و تصمیم گیرنده‌ی دوم را پیرو یا دنباله رو می‌نامیم. ابتدا رهبر تصمیم خود را مشخص می‌کند و سپس پیرو با آگاهی از تصمیم رهبر تابع هدفش را بهینه می‌سازد. با توجه به این قاعده رهبر نیز تصمیم خود را طوری اتخاذ می‌کند که انتظار پاسخ معقول پیرو در مقابل تصمیمش را دارد. جواب به‌دست آمده به‌صورت روند فوق را جواب تعادل استکلبرگ می‌نامند. یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی دوسطحی برای محاسبه‌ی تعادل استکلبرگ به‌صورت زیر نوشته می شود(بیگدلی، ۱۳۹۶):

$$\min_{x} Z_1 (x,y) = c_1x + d_1y$$

که در آن y جواب مسئله زیر است.

$$\min_{y} Z_2 (x,y) = c_2x + d_2y \qquad (18)$$
$$s.t. \quad Ax + By \le b$$
$$x \ge 0 , y \ge 0$$

که در آن به ازای $c_i,\ i = 1,2$ یک بردار سطری n1 بعدی، d_j یک بردار سطری n2 بعدی، ماتریس‌های ضرایب A و B به ترتیب ماتریس‌هایی $m \times n1$ و $m \times n2$ و b یک بردار ستونی m بعدی است. در مسئله‌ی برنامه‌ریزی دو سطحی (۱۸)، $Z_1 (x,y)$ و $Z_2 (x,y)$ به ترتیب نمایش دهنده‌ی توابع هدف رهبر و پیرو هستند و x و y به ترتیب نشان دهنده‌ی متغیرهای تصمیم رهبر و پیرو هستند. فرض می‌شود که هر تصمیم‌گیرنده از تابع هدف و محدودیت‌های حریف آگاهی دارد. ابتدا رهبر تصمیم‌گیری می‌کند و سپس پیرو با آگاهی از تصمیم رهبر، تصمیم خود را اتخاذ می‌کند. یعنی پس از انتخاب راهبرد توسط رهبر، پیرو مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر را حل می‌کند(همان):

$$\min_{y} Z_2 (x,y) = c_2x + d_2y \qquad (19)$$
$$s.t. \quad By \le b - Ax$$
$$y \ge 0$$

با حل این مسأله، جواب بهینه‌ی $y(x)$ و به‌عنوان پاسخ منطقی پیرو به‌دست می‌آید. رهبر با این فرض که پیرو پاسخ منطقی $y(x)$ را خواهد داد تابع هدف $Z_1(x, y(x))$ خود را بیشینه می‌کند. در این صورت جواب به‌دست آمده را جواب استکلبرگ می‌نامند. روش‌های مختلفی برای حل این مسئله وجود دارد که در اینجا روش کان- تاکر را استفاده می‌نماییم. برای حل این مسئله در روش کان- تاکر مسئله‌ی رهبر با محدودیتهای شامل شرایط بهینگی کان - تاکر مسأله ی پیرو (۱۹) حل می‌شود. پس از تبدیل مسأله‌ی (۱۹) به مسئله‌ی بیشینه‌سازی، شرایط کان - تاکر برای آن به‌صورت زیر نوشته می‌شود(همان):

$$\begin{aligned} & uB - v = -d_2 \\ & u(Ax + By - b) - vy = 0 \\ & Ax + By \le b \\ & y \ge 0\,, u^T \ge 0\,, v^T \ge 0 \end{aligned} \tag{20}$$

که در آن u یک بردار سطری m بعدی و v یک بردار سطری $n2$ بعدی است. اکنون مسئله‌ی پیرو (۱۹) با شرایط (۲۰) جایگزین گردیده و مسئله‌ی برنامه‌ریزی دوسطحی (۱۸) به‌صورت معادل زیر که یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی ریاضی یک سطحی است فرمول‌بندی می‌شود(همان):

$$\begin{aligned} \min Z_1 (x, y) = \ & c_1 x + d_1 y \\ s.t. \quad & uB - v = -d_2 \\ & u(Ax + By - b) - vy = 0 \\ & Ax + By \le b \\ & x \ge 0\,, y \ge 0\,, u^T \ge 0\,, v^T \ge 0 \end{aligned} \tag{21}$$

خطی‌سازی مدل دو سطحی استکلبرگ ارائه شده تحقیق:

مدل ریاضی استکلبرگ جزء مسائل دوسطحی در تحقیق در عملیات و ریاضیات است و روش‌های حل مسئله برنامه‌ریزی دوسطحی را می‌توان به پنج دسته روش‌های کلی، روش‌های شمارشی، روش‌های متناظر کردن سطح دوم و روش‌های فراابتکاری تقسیم‌بندی نمود(حسینی و همکاران، ۱۳۹۳). در روش‌های متناظر کردن سطح دوم در مدل‌هایی که خطی نیستند و در آنها نیاز به تبدیل مدل از حالت غیرخطی به خطی وجود دارد می‌توان از روش شرایط بهینگی KKT یا تابع جریمه استفاده و مدل را خطی نمود. به‌طوریکه مسئله سطح دوم به محدودیت‌هایی برای مسئله اصلی تبدیل گردد. در این مقاله نیز مدل اولیه ارائه شده غیرخطی است که برای حل مدل ابتدا خطی‌سازی صورت می‌گیرد و سپس مدل حل می‌گردد.

ابتدا با استفاده از محدودیت های زیر برخی از متغیر ها خطی می شوند:

خطی سازی عبارت(۲) : $y_j^{e(a)}(t) r_j^a(t)$

خطی سازی عبارت(۲) : $y_j^{e(a)}(t) r_j^a(t)$

$$ry_j^{e(a)} \le M . y_j^{e(a)}(t) \tag{2-a}$$

$$ry_j^{e(a)} \le r_j^a(t) + M.(1 - y_j^{e(a)}(t)) \tag{2-b}$$

$$ry_j^{e(a)} \ge r_j^a(t) - M.(1 - y_j^{e(a)}(t)) \tag{2-c}$$

اگر متغیر $y_j^{e(a)}(t)$ برابر با یک باشد آنگاه متغیر $ry_j^{e(a)}$ در محدودیت (2-a) برقرار است . و با توجه به محدودیت های (2-b)و(2-c) داریم:

$$ry_j^{e(a)} \leq r_j^a(t) \tag{2-d}$$
$$ry_j^{e(a)} \geq r_j^a(t) \tag{2-e}$$

که منجر به $ry_j^{e(a)} = r_j^a(t)$ می شود. همچنین اگر متغیر باینری $y_j^{e(a)}(t)$ برابر با صفر باشد آنگاه محدودیت (2-a) الزام می کند که $ry_j^{e(a)}$ برابر با صفر باشد از طرفی در محدودیت های (2-b) و (2-c) روابط برقرار خواهند بود. برای سایر محدودیتها نیز بدین صورت خطی‌سازی انجام پذیرفته که در ادامه ارائه شده است:

خطی سازی عبارت(۳) : $y_j^{e(a)}(t) r_j^z(t)$

$$ry_j^{e(z)} \leq M.y_j^{e(a)}(t) \tag{3-a}$$
$$ry_j^{e(z)} \leq r_j^z(t) + M.(1 - y_j^{e(a)}(t)) \tag{3-b}$$
$$ry_j^{e(z)} \geq r_j^z(t) - M.(1 - y_j^{e(a)}(t)) \tag{3-c}$$

خطی سازی عبارت(۷) : $\delta(y_i^{m(z)} - j) * B_i^a(t)$

$$BB_i^a(t) \leq M.\delta(y_i^{m(z)} - j) \tag{7-a}$$
$$BB_i^a(t) \leq B_i^a(t) + M.\delta(y_i^{m(z)} - j) \tag{7-b}$$
$$BB_i^a(t) \geq B_i^a(t) - M.\delta(y_i^{m(z)} - j) \tag{7-c}$$

خطی سازی عبارت (۸) : $\delta(y_i^{m(z)} - j) * B_i^z(t)$

$$BB_i^z(t) \leq M.\delta(y_i^{m(z)} - j) \tag{8-a}$$
$$BB_i^z(t) \leq B_i^z(t) + M.\delta(y_i^{m(z)} - j) \tag{8-b}$$
$$BB_i^z(t) \geq B_i^z(t) - M.\delta(y_i^{m(z)} - j) \tag{8-c}$$

مدل تک سطحی خطی شده:

چون تابع هدف رهبر[1] و تابع هدف پیرو[2] مقعر هستند پس مدل سطح پایین با استفاده از شرایط کاروش کان تاکر به یک مدل تک سطحی تبدیل می‌گردد، با استفاده از این شرایط، تابع هدف پیرو با محدودیت‌هایی به نام شرایط ثابت(محدودیت‌های حاصل از مدل اولیه) و شرایط مکمل(محدودیت‌های مکمل زائد) جایگزین می‌شوند که به محدودیت‌های مسئله با تابع هدف رهبر اضافه می‌گردند (سعیدی مهرآباد و اعظمی، ۱۳۹۶) که در ادامه تابع هدف مدل تک سطحی که همان تابع هدف سطح بالا یا به‌عبارتی تابع هدف رهبر است ارائه و شرایط ثابت یا همان محدودیت‌های مکمل زائد نیز ارائه می‌گردد:

$$Max\ F_B = \sum_{i}^{i_d} q_i^{b(d)} * bb_i^d(t) + \sum_{i}^{iz} q_i'^{b(d)} * bb_i'^d(t) - \sum_{j}^{j_a} o_j^{m(a)} * r_j^a(t) - \sum_{j}^{j_z} o_j'^{m(z)} * r_j'^z(t)$$

$$bb_i^{(d)}(t) = b_i^{(d)}(t-1) * [\prod_{j=1}^{j_a}(1 - l_{ji}^{e(z)}(t)\delta\left(i - ry_j^{e(a)}\right)] * [\prod_{i=1}^{j_z}(1 - l_{ji}^{e(z)}(t)\delta\left(i - ry_j^{e(z)}\right)] \quad \forall i,t \qquad (۲۲)$$

$$bb_i'^{(z)}(t) = bb_i'^{(z)}(t-1) * [\prod_{j=1}^{j_a}(1 - l_{ji}^{e(z)}(t)\delta\left(i - ry_j^{e(a)}\right)] * [\prod_{i=1}^{j_z}(1 - l_{ji}^{e(z)}(t)\delta\left(i - ry_j^{e(z)}\right)] \quad \forall i,t \qquad (۲۳)$$

$$\sum_{t} \sum_{j=1}^{j_a + j_z} y_{ij}^{m(z)}(t) \le s_i^{m(z)}(t) \quad \forall i,t \qquad (۲۴)$$

$$\sum_{j=1}^{j_a + j_z} y_{ij}^{m(z)}(t) \le s_i^{m(z)}(t) \quad \forall i,t \qquad (۲۵)$$

$$ry_j^{e(a)} \le M.y_j^{e(a)}(t) \quad \forall j,t \qquad (۲۶)$$

$$ry_j^{e(a)} \le r_j^a(t) + M.(1 - y_j^{e(a)}(t)) \quad \forall j,t \qquad (۲۷)$$

$$ry_j^{e(a)} \ge r_j^a(t) - M.(1 - y_j^{e(a)}(t)) \quad \forall j,t \qquad (۲۸)$$

$$ry_j^{e(z)} \le M.y_j^{e(a)}(t) \quad \forall j,t \qquad (۲۹)$$

---

1 Target function of the leader
۲ Target function of the follower

$$ry_j^{e(z)} \le r_j^z(t) + M.(1 - y_j^{e(a)}(t)) \qquad \forall j,t \qquad (۳۰)$$

$$ry_j^{e(z)} \ge r_j^z(t) - M.(1 - y_j^{e(a)}(t)) \qquad \forall j,t \qquad (۳۱)$$

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in j_a} g_j^{e(a)} * [\prod_{i=1}^{i_z} (1 - l_{ij}^{e(z)}(t) BB_i^a(t))]\\ &+\sum_{j\in j_a} g_j^{e(z)} * [\prod_{i=1}^{i_z} (1 - l_{ij}^{e(z)}(t) BB_i^z(t))]\\ &+\lambda_{j1} + \lambda_{j2} + \lambda_{jt3} + \lambda_{jt4} - \lambda_{jt5} - \lambda_{jt6} - \lambda_{jt6} - \lambda_{jt7} - \lambda_{jt8} = 0\end{aligned} \qquad \forall j,t \qquad (۳۲)$$

$$BB_{ij}^a(t) \le M.\delta(y_i^{m(z)} - j) \qquad \forall i,j,t \qquad (۳۳)$$

$$BB_{ij}^a(t) \le B_i^a(t) + M.\delta(y_i^{m(z)} - j) \qquad \forall i,j,t \qquad (۳۴)$$

$$BB_{ij}^a(t) \ge B_i^a(t) - M.\delta(y_i^{m(z)} - j) \qquad \forall i,j,t \qquad (۳۵)$$

$$BB_{ij}^z(t) \le M.\delta(y_i^{m(z)} - j) \qquad \forall i,j,t \qquad (۳۶)$$

$$BB_{ij}^z(t) \le B_i^z(t) + M.\delta(y_i^{m(z)} - j) \qquad \forall i,j,t \qquad (۳۷)$$

$$BB_{ij}^z(t) \ge B_i^z(t) - M.\delta(y_i^{m(z)} - j) \qquad \forall i,j,t \qquad (۳۸)$$

$$\sum_t \sum_i x_{ji}^{e(a)} + S_{1j} - s_j^{e(z)}(t) = 0 \qquad \forall j \qquad (۳۹)$$

$$\sum_t \sum_i x_{ji}'^{e(z)} + S_{2j} - s_j^{e(a)}(t) = 0 \qquad \forall j \qquad (۴۰)$$

$$\sum_{i\in i_z + i_d} x_{ji}^{e(a)} + S_{3tj} - s_j^{e(z)}(t) = 0 \qquad \forall j,t \qquad (۴۱)$$

$$\sum_{i\in i_z + i_d} x_{ji}'^{e(a)} + S_{4tj} - s_j^{e(z)}(t) = 0 \qquad \forall j,t \qquad (۴۲)$$

$$-r_j^z(t) + S_{jt5} = 0 \qquad \forall j,t \qquad (۴۳)$$

$$-r_j^a(t) + S_{jt6} = 0 \qquad \forall j,t \qquad (۴۴)$$

$$-B_{it}^a(t) + S_{it7} = 0 \qquad \forall i,t \qquad (۴۵)$$

$$-B_{it}^z(t) + S_{it8} = 0 \qquad \forall i,t \qquad (۴۶)$$

$$\lambda_{j1}.S_{j1} = 0 \qquad \forall j \qquad (۴۷)$$

$$\lambda_{j2}.S_{j2} = 0 \qquad \forall j \qquad (۴۸)$$

$$\lambda_{jt3}.S_{jt3} = 0 \qquad \forall j,t \qquad (۴۹)$$

$$\lambda_{jt4}.S_{jt4} = 0 \qquad \forall j,t \qquad (۵۰)$$

$$\lambda_{jt5}.S_{jt5} = 0 \qquad \forall j,t \qquad (۵۱)$$

$$\lambda_{jt6}.S_{jt6}=0 \qquad \forall j,t \qquad (۵۲)$$
$$\lambda_{jt7}.S_{jt7}=0 \qquad \forall i,t \qquad (۵۳)$$
$$\lambda_{jt8}.S_{jt8}=0 \qquad \forall i,t \qquad (۵۴)$$

خطی‌سازی شرط مکمل زائد:

محدودیت‌های شرط مکمل زائد را به‌صورت زیر خطی می‌کنیم، سپس در مدل بالا جایگزین می‌کنیم:

خطی کردن محدودیت (۴۷) $\lambda_{j1}.S_{j1}=0$:

$$\lambda_{j1}\le M.YY_{j1}$$
$$S_{j1}\le M.(1-YY_{j1})$$

خطی کردن محدودیت (۴۸) $\lambda_{j2}.S_{j2}=0$

$$\lambda_{j2}\le M.YY_{j2}$$
$$S_{j2}\le M.(1-YY_{j2})$$

خطی کردن محدودیت(۴۹) $\lambda_{jt3}.S_{jt3}=0$

$$\lambda_{jt3}\le M.YY_{jt3}$$
$$S_{jt3}\le M.(1-YY_{jt3})$$

خطی کردن محدودیت (۵۰) $\lambda_{jt4}.S_{jt4}=0$

$$\lambda_{jt4}\le M.YY_{jt4}$$
$$S_{jt4}\le M.(1-YY_{jt4})$$

خطی کردن محدودیت (۵۱) $\lambda_{jt5}.S_{jt5}=0$

$$\lambda_{jt5}\le M.YY_{jt5}$$
$$S_{jt5}\le M.(1-YY_{jt5})$$

خطی کردن محدودیت (۵۲) $\lambda_{jt6}.S_{jt6}=0$

$$\lambda_{jt6}\le M.YY_{jt6}$$
$$S_{jt6}\le M.(1-YY_{jt6})$$

خطی کردن محدودیت (۵۳) $\lambda_{jt7}.S_{jt7}=0$

$$\lambda_{jt7}\le M.YY_{jt7}$$
$$S_{jt7}\le M.(1-YY_{jt7})$$

خطی کردن محدودیت (۵۴) $\lambda_{jt8}.S_{jt8}=0$

$$\lambda_{jt8} \le M.YY_{jt8}$$
$$S_{jt8} \le M.(1-YY_{jt8})$$

که :

$$YY_{j1}, YY_{j2}, YY_{jt3}, YY_{jt4}, YY_{jt5}, YY_{jt6}, YY_{jt7}, YY_{jt8} \in \{0,1\}$$

نتایج محاسباتی

در این بخش به تشریح نتایج حل مسئله پرداخته خواهد شد. لازم به ذکر است، کلیه محاسباتی که در این بخش نتایج آن گزارش شده است، بر روی یک سیستم با مشخصات ، CPU Core i5 1GHz 8 GB RAM که دارای سیستم عامل ویندوز ۱۰ نسخه ۶۴ بیتی بود است، اجرا شده است.

برای ساخت نمونه مسائل مختلف سطوح مختلفی برای اندازه تعداد دارایی گروه خودی (i_d)، تعداد سلاح‌های گروه خودی (i_z)، تعداد واحدهای هوایی دشمن (J_a)، تعداد واحدهای زمینی دشمن (J_z) در نظر گرفته شده است. سطوح در نظر گرفته شده برای این پارامترها در جدول (۳) آورده شده است. بر اساس حداکثر تعداد دارایی و سلاح‌ها در هر نمونه مسئله، نمونه مسائل در سه گروه کوچک، متوسط و بزرگ تقسیم‌بندی گردیدند. اگر حداکثر تعداد دارایی و سلاح‌ها یک نمونه مسئله کمتر از ۵ عدد باشد در گروه کوچک، اگر بین ۵ تا ۱۵ عدد باشد در گروه متوسط و اگر بیشتر از ۱۵ عدد باشد در گروه بزرگ قرار می‌گیرند. به‌منظور بررسی مدل، ۳۰ نمونه مسئله که در هر گروه ۱۰ نمونه قرار داشتند، تولید گردید. با توجه به جدول برای هرکدام از پارامترهای ذکر شده ۳ گروه مسئله درنظر گرفته شده است که منجر به ایجاد ۳۰ نمونه مسئله شد.

همچنین برای هر یک از مثالها مقادیر پارامترها به‌صورت توزیع یکنواخت در بازه منطقی با نظر خبرگان نظامی تعیین شده است (جدول ۱).

جدول (۱) مقادیر پارامترها(u=uniform)

Parameter	Value	Parameter	Value
$\boldsymbol{v_i^{e(d)}}$	$u\sim(100, 500)$	$g_j^{e(a)}$	$u\sim$(15000, 60000)$
$\boldsymbol{v'^{e(z)}_i}$	$u\sim(100, 500)$	$g'^{e(z)}_j$	$u\sim$(15000, 60000)$
$\boldsymbol{l_{ji}^{e(a)}(t)}$	$u\sim(0.1, 0.9)$	$o_j^{m(a)}$	$u\sim$(15000, 60000)$
$\boldsymbol{l_{ji}^{e(z)}(t)}$	$u\sim(0.1, 0.9)$	$o'^{m(z)}_j$	$u\sim$(15000, 60000)$
$\boldsymbol{l_{ij}^{m(z)}(t)}$	$u\sim(0.1, 0.9)$	$t_i^{m(a)}$	$u\sim(0, 5)$

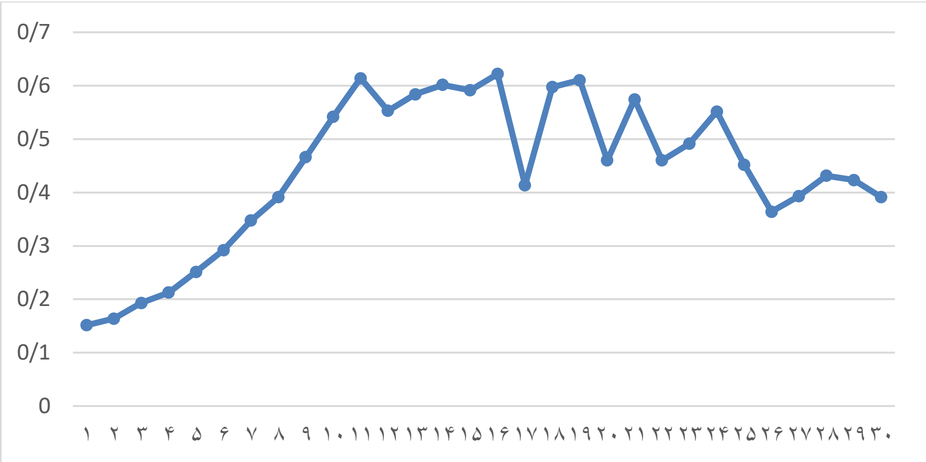
Parameter	Value	Parameter	Value
$\boldsymbol{q_i^{b(d)}}$	u~(15000, 60000)$	$t_j^{e(z)}$	u~ (0, 5)
$\boldsymbol{q'^{b(z)}_i}$	u~(15000, 60000)$	$t_j^{e(a)}$	u~(0, 5)
$\boldsymbol{s_j^{e(a)}(t)}$	u~(10, 500)	$s_j^{e(a)}(t)$	u~(10, 500)
$\boldsymbol{s_i^{m(z)}(t)}$	u~(10, 500)	$s_j^{e(z)}(t)$	u~(10, 500)
$\boldsymbol{s_j^{e(z)}(t)}$	u~(10, 500)	$S_i^{m(z)}(t)$	u~(10, 500)

نتایج خروجی تابع هدف و زمان پردازش الگوریتم به دست آمده از حل ۳۰ مثال در نرم‌افزار گمز در شکل‌های (۱) تا (۲) آورده شده است.

جدول (۲) نتایج خروجی متغیرها از حل مثال‌ها در نرم افزار گمز

شماره	گروه ۱						گروه ۲						گروه ۳					
	پارامترهای ورودی				خروجی	زمان اجرا (ثانیه)	پارامترهای ورودی				خروجی	زمان اجرا (ثانیه)	پارامترهای ورودی				خروجی	زمان اجرا (ثانیه)
	i_d	i_z	J_a	J_z	$b_i^{(d)}$		i_d	i_z	J_a	J_z	$b_i^{(d)}$		i_d	i_z	J_a	J_z	$b_i^{(d)}$	
۱	۲	۲	۲	۱	۰/۴۷۲	۰/۱۲	۶	۶	۷	۶	۰/۲۲۱	۴۵۰	۱۶	۱۸	۱۶	۱۶	۰/۱۴۳	۸۰۰۰
۲	۲	۲	۲	۳	۰/۳۴۱	۰/۱۸	۶	۶	۱۱	۶	۰/۲۰۲	۸۵۰	۱۶	۲۱	۱۶	۱۶	۰/۲۱۸	۱۴۰۰۰
۳	۲	۲	۳	۲	۰/۳۴۵	۰/۱۹	۶	۶	۶	۱۲	۰/۱۹۵	۹۰۰	۱۶	۱۸	۱۹	۱۷	۰/۱۰۵	۱۵۶۰۰
۴	۲	۲	۳	۳	۰/۳۳۲	۰/۲۵	۶	۱۳	۶	۶	۰/۵۱۲	۹۹۰	۱۶	۲۵	۱۶	۱۶	۰/۳۱۹	۱۶۰۰۰
۵	۲	۲	۳	۵	۰/۲۰۲	۰/۴۲	۶	۱۵	۶	۷	۰/۶۳۵	۲۰۵۰	۱۶	۱۶	۱۹	۲۲	۰/۰۸۴	۱۶۷۰۰
۶	۲	۲	۵	۳	۰/۲۱۳	۰/۴۴	۷	۱۱	۷	۸	۰/۳۵۲	۲۰۴۵	۱۶	۳۲	۱۶	۱۶	۰/۵۳	۲۰۰۰۰
۷	۳	۳	۲	۱	۰/۳۹۲	۰/۲۰	۷	۱۳	۸	۸	۰/۴۱۵	۲۰۸۰	۱۶	۳۵	۱۶	۱۶	۰/۶۲	۲۵۰۰۰
۸	۳	۳	۳	۵	۰/۲۱۷	۰/۴۹	۷	۱۵	۱۲	۱۳	۰/۲۵۵	۳۰۰۰	۱۶	۱۸	۲۲	۲۱	۰/۰۷۳	۱۷۰۰۰
۹	۳	۴	۵	۳	۰/۲۲۹	۰/۵۵	۹	۱۴	۶	۶	۰/۶۲۲	۲۶۰۰	۱۶	۳۰	۱۷	۱۸	۰/۳۴۲	۲۳۰۰۰
۱۰	۳	۴	۳	۲	۰/۲۶۱	۰/۶۲	۹	۱۴	۷	۶	۰/۵۹۳	۲۸۴۰	۱۶	۱۸	۲۵	۲۵	۰/۰۳۱	۳۰۰۰۰

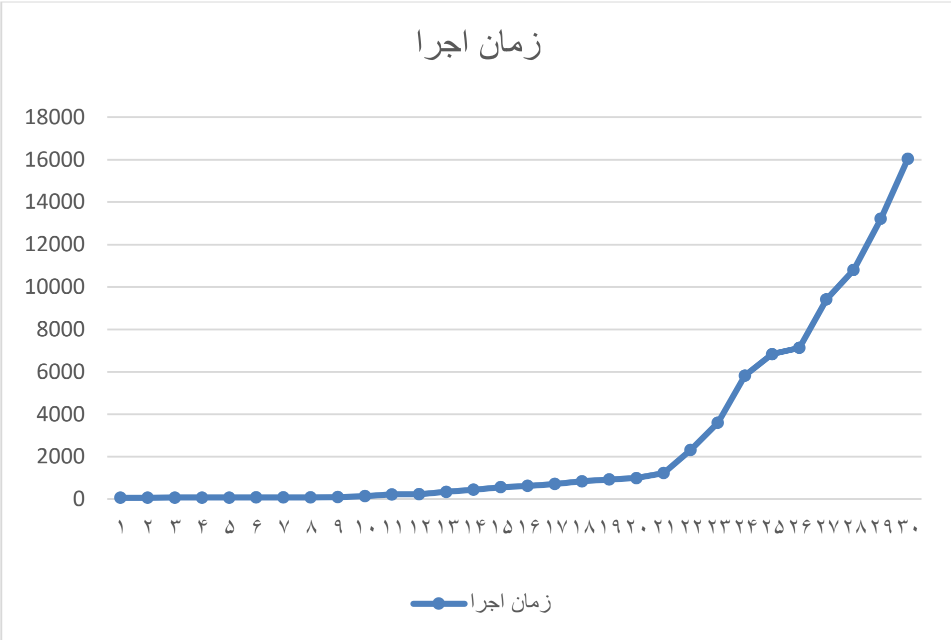
نتایج خروجی تابع هدف و زمان پردازش الگوریتم به دست آمده از حل ۳۰ مثال در نرم‌افزار گمز در شکل‌های (۱) تا (۲) آورده شده است.



شکل (۱) نمودار احتمال سالم ماندن i امین دارایی گروه خودی به ازای مثال‌های مختلف

با توجه به نتایج حاصل از حل نمونه مسائل به ازای تعیین تعداد مناسب تعداد سلاح‌های گروه خودی بر مبنای تجهیزات هوایی و زمینی دشمن در نمونه‌های مختلف احتمال سالم ماندن دارایی گروه خودی افزایش یافت. در نمونه‌هایی که تعداد سلاح‌های گروه خودی به نسبت تجهیزات دشمن کمتر انتخاب گردید، متناظراً احتمال سالم ماندن دارایی نیز متناسب با آن کاهش یافت.

علاوه بر این با افزایش تعداد اندیس‌های ورودی مسئله ((i_d)، (i_z)، (J_a)، (J_z)) به‌طور تصاعدی زمان اجرای نمونه‌ها افزایش یافت (شکل ۲). بنابراین برای حل مسائل با ابعاد بالاتر (به ازای اندیس‌های بالاتر از ۱۵) و ماهیت مسئله نیاز به استفاده از روش‌های فراابتکاری خواهد بود. اما در صورت داشتن زمان کافی، استفاده از روش‌های دقیق به‌منظور کاهش خطای عملیاتی توصیه می‌گردد.



شکل (۲) نمودار کل زمان پردازش در مثال‌های مختلف

نتیجه گیری

در صحنه‌ی نبرد یک فرمانده باید در کوتاهترین زمان ممکن بهترین تصمیم را با در نظر گرفتن فاکتورهای مختلف اعم از نقاط قوت، ضعف و محدودیت‌ها اتخاذ نماید تا بتواند علاوه بر حداقل نمودن تلفات یگان خودی مأموریت‌های تعریف شده را نیز به نحو احسن انجام دهد. در چنین شرایطی با وجود انواع محدودیت‌هایی که در صحنه نبرد به‌صورت پویا ایجاد می‌شوند اغلب به وقوع پیوستن اشتباهات از سوی فرمانده به دلیل پیچیدگی شرایط جنگی و وجود استرس های موجود گریزناپذیر می‌نماید. در این شرایط یک سیستم تصمیم‌ساز، بسیار سریع‌تر و دقیق‌تر از یک اپراتور انسانی می‌تواند موثرتر باشد که البته تلفیق این سیستم با یک فرماندهی با تجربه بر مزایای این سیستم می‌افزاید. لذا در این تحقیق یک مدل ریاضی استکلبرگ (بازی غیرهمکارانه) از نظریه بازی‌ها به‌عنوان یک روش در مدیریت و تصمیم‌گیری جهت حداکثر نمودن احتمال سالم ماندن دارایی‌های خودی و کمینه نمودن احتمال سالم ماندن نیروهای هوایی و زمینی دشمن ارائه شد. ابتدا یک مدل ریاضی دوسطحی استکلبرگ ارائه شد و پس‌از خطی‌سازی، مدل دو سطحی با استفاده از شرایط کاروش کان تاکر به مدل تک سطحی تبدیل شد. در نهایت جهت نمایش کارایی مدل، تعدادی مثال طراحی و با استفاده از نرم‌افزار گمز حل گردید. نوآوری‌های در نظر گرفته شده شامل در نظر گرفتن نیروهای

هوایی و زمینی به‌صورت همزمان و در نظر گرفتن دارایی‌های طرف خودی و دشمن به‌صورت همزمان است.

برای پژوهش‌های آتی می‌توان به امکان جایگزینی تسهیلات پشتیبان در صورت انهدام تسهیلات موجود توسط دشمن، متحرک بودن سلاح و هدف بطور همزمان، به‌کارگیری روش‌های حل دقیق مانند رویکرد آزادسازی لاگرانژ و یا الگوریتم تجزیه بندرز و به‌کارگیری رویکردهای فراابتکاری برای حل مثال‌های با ابعاد بزرگ اشاره نمود.

قدردانی

از خبرگان توانمندی که در طول پژوهش، دانش خویش را سخاوتمندانه در اختیار محققان این پژوهش قرار دادند و استواری پژوهش حاضر بر مشارکت و دانش این بزرگواران قرارگرفته است بسیار سپاسگزاریم.

منابع

- احمدی، بهمن. نریمان زاده، نادر. جمالی، علی. (۱۳۹۵)، طراحی استراتژیک سیستم های مکانیکی در فضای غیرهمکارانه با استفاده از نظریه بازی، ۷(۱۶). ۳۲۶-۳۱۷.
- افشردی، محمدحسین، (۱۳۹۴)، طرح‌ریزی راهبردی نظامی در صحنه جنگ و عملیات، تهران، دانشگاه عالی دفاع ملی.
- امیربیگی، حسن، (۱۳۷۲)، طرحریزی عملیات مشترک و مرکب، دانشکده فرماندهی و ستادآجا، انتشارت دافوس.
- بیگدلی ، حمید، (۱۳۹۶) رساله دکتری حل مسائل بازی چند هدفی فازی با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی چند هدفی، دانشگاه بیرجند دانشکده ریاضی و آمار.
- بیگدلی ، حمید، (۱۳۹۸) کاربرد نظریه بازی در تحلیل دفاع موشکی ضد بالستیک، دوفصلنامه بازی جنگ، ۴، ۴۱-۲۵.
- حسینی، اقبال. نخعی کمال‌آبادی، عیسی. فتحی، محمد. (۱۳۹۳)، توسعه روش‌های حل مسئله برنامه‌ریزی دو سطحی خطی بر ا ساس روش شمارش ضمنی و روش دوگان، مجله مدل سازی پیشرفته ریاضی، ۱(۴).
- حیدری ، کیومرث، (۱۳۹۸) رساله دکتری بازطراحی اصول جنگ ارتش جمهوری اسلامی ایران در جنگ ناهمطراز ، دانشگاه عالی دفاع ملی.
- سعیدی مهرآباد، محمد. اعظمی، عادل. (۱۳۹۶)، ارائه مدل بهینه‌سازی استوار دوسطحی در برنامه‌ریزی تولید با در نظر گرفتن تصمیمات قیمت‌گذاری به‌منظور پاسخگویی به تقاضا در فضای رقابتی: مطالعه موردی، نشریه پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولید، ۱۱(۵). ۱۹۱-۱۷۳.

- Ahuja, R. K., A. Kumar, K. C. Jha, and J. B. Orlin, (2007), Exact and heuristic algorithms for the weapon-target assignment problem, Oper. Res., vol. 55, no.6, pp. 1136–1146,
- Ahuja, R. K., Kumar, A., Jha, K. C., & Orlin, J. B. (2003). Exact and heuristic algorithms for the weapon-target assignment problem. Operations Research, 55(6), 1136-1146.
- Akbari-Jafarabadi, M., Tavakkoli-Moghaddam, R., Mahmoodjanloo, M., & Rahimi, Y. (2017). A tri-level r-interdiction median model for a facility location problem under imminent attack. Computers & Industrial Engineering, 114, 151-165.
- Aksen, D, Piyade, N., & Aras, N, (2010), "The budget constrained r-interdiction median problem with capacity expansion ",Springer-Verlag ,p. 269-291.
- Bigdeli.H, Hassanpour.H, Tayyebi.J, Multiobjective security game with fuzzy payoffs, Iranian Journal of Fuzzy Systems, 16 (1), 89-101 (2019).

- Feghhi, N., Kosari, A. R., & Atashgah, A. (2021). A real-time exhaustive search algorithm for the weapon-target assignment problem. Scientia Iranica, 28, 1539-1551.
- Haywood O. G. (1989). “Military Decision and Game Theory” Wiley, Journal of the Operations Research Society of America, Vol. 2, No. 4, PP 365-385.
- Karasakal, Orhan, (2008) Air defense missile-target allocation models for a naval task group, Computers & Operations Research 35 1759 – 1770.
- Kline, A. G., Ahner, D. K., & Lunday, B. J. (2020). A heuristic and metaheuristic approach to the static weapon target assignment problem. Journal of Global Optimization, 78(4), 791-812.
- Liberatore, F, Scaparra, M, Daskin, P., & Mark S, (2011), "Analysis of facility protection strategies against an uncertain number of attacks: The stochastic R-interdiction median problem with fortification," Computers & Operations Research 38, p. 357–366.
- Losada, C, Scaparra, M, Paola, C., & Richard L., (2009) "On a bi-level formulation to protect uncapacitated p-median systems with facility recovery time and frequent disruptions," Electronic Notes in Discrete Mathematics 36, p. 591–598.
- Mahmoodjanloo, M., Parvasi, S. P., & Ramezanian, R. (2016). A tri-level covering fortification model for facility protection against disturbance in r-interdiction median problem. Computers & Industrial Engineering, 102, 219-232.
- Musegaas, M., Schlicher, L., & Blok, H. (2021). Stackelberg production-protection games: Defending crop production against intentional attacks. European Journal of Operational Research.
- Naseem, A., Shah, S. T. H., Khan, S. A., & Malik, A. W. (2017). Decision support system for optimum decision making process in threat evaluation and weapon assignment: Current status, challenges and future directions. Annual reviews in control, 43, 169-187.
- Quadros, H., Roboredo, M. C., & Pessoa, A. A. (2018). A branch-and-cut algorithm for the multiple allocation r-hub interdiction median problem with fortification. Expert Systems with Applications, 110, 311-322.
- Silav, A., Karasakal, E., & Karasakal, O. (2021). Bi-objective dynamic weapon-target assignment problem with stability measure. Annals of Operations Research, 1-19.
- Sonuç, E. (2020). A modified crow search algorithm for the weapon-target assignment problem. An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA), 10(2), 188-197.
- Stoos, V., Ulmke, M., & Govaers, F. (2021). Adiabatic Quantum Computing for Solving the Weapon-Target Assignment Problem. arXiv preprint arXiv:2105.02011.
- Truong, N. X., Phuong, P. K., & Tien, V. H. (2021, April). Fast and Simple Method for Weapon Target Assignment in Air Defense Command and Control

System. In International Conference on Industrial Networks and Intelligent Systems (pp. 403-415). Springer, Cham.

- Wu, X., Chen, C., & Ding, S. (2021). A Modified MOEA/D Algorithm for Solving Bi-Objective Multi-Stage Weapon-Target Assignment Problem. IEEE Access, 9, 71832-71848.
- Zhang, K., Zhou, D., Yang, Z., Li, X., Zhao, Y., & Kong, W. (2020, October). A dynamic weapon target assignment based on receding horizon strategy by heuristic algorithm. In Journal of Physics: Conference Series (Vol. 1651, No. 1, p. 012062). IOP Publishing.
- Zou, S., Shi, X., Guo, R., & Lin, X. (2020, July). Solving Multi-Stage Weapon Target Assignment Problems by C-TAEA. In 2020 39th Chinese Control Conference (CCC) (pp. 1593-1598). IEEE.